Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre printemps 2017-2018
Introduction aux ÉDP — Master 1

Partiel numéro 1 (3h) - énoncé

Vendredi 16 mars 2018

Veuillez rédiger les exercices dans l'ordre - quitte à sauter des pages.
Vous avez droit uniquement au formulaire standardisé.
La qualité de la rédaction est d'autant plus importante que l'exercice semble évident.
Encadrez en rouge les réponses pour ne pas abuser de la patience du correcteur...
L'énoncé comporte quatre exercices, notés sur 3, 2, 3 et 13 points respectivement.

1 Calcul de limites. 3 pt.

Calculer les limites des suites suivantes dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque $n \to +\infty$ (0.5 pt par limite):

$$\textbf{a)}\ \delta_{1/n}. \quad \textbf{b)}\ \delta_n. \quad \textbf{c)}\ \sum_{k=n}^{+\infty} \delta_k. \quad \textbf{d)}\ \cos(nx). \quad \textbf{e)}\ \sin\left(\frac{x}{n}\right). \quad \textbf{f)}\ \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

2 Les limites dans $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$. 2 pt.

Considérons la suite de distributions $T_n = e^{n^2}\delta_n$.

A. (1 pt) Converge-t-elle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

B. (1 pt) Converge-t-elle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$? *Indication*: Penser aux Gaussiennes.

3 Un peu de Fourier. 3 pt.

A. (1 pt) Calculer la transformée de Fourier de l'indicatrice de l'intervalle $[-1,1]$.

B. (2 pt) En déduire la valeur de l'intégrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

Tournez la page SVP.

4 Distributions antisymétriques. 13 pt.

Rappel: On dit qu'une distribution sur $\mathbb{R}$ est:
-*Symétrique* lorsque $T = \widetilde{T}$ (i.e. $< T, \phi > = < T, \widetilde{\phi} >$ pour toute fonction test ϕ).
-*Antisymétrique* lorsque $T = -\widetilde{T}$ (i.e. $< T, \phi > = - < T, \widetilde{\phi} >$ pour toute fonction test ϕ).
On rappelle que $\widetilde{\phi}$ est définie par $\widetilde{\phi}(x) = \phi(-x)$.

A. (2 pt) Montrer qu'en dérivant un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on passe d'une distribution paire à une impaire et vice versa, alors qu'en prenant la transformation de Fourier d'une distribution tempérée paire (ou impaire) on retombe sur une distribution tempérée paire (resp. impaire).
Remarque: Je vous laisse traiter juste le cas où T est pair, l'autre se traite clairement de la même façon.

B. (2 pt) Calculer $x\ Vp(1/x)$ puis $x^2\ (Vp(1/x))'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

C. (3 pt) Résoudre l'équation $x^2 T = 1$ d'inconnue T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D. (3 pt) Montrer que la fonction $|x|$ définit une distribution tempérée, puis que l'on a:

$$\mathscr{F}(|x|) = a\Big(Vp(1/x)\Big)' + b\delta_0,\ a, b \in \mathbb{C}.$$

Calculer a. *Indication*: Calculer $(|x|)''$ et utiliser la question a).

E. (3 pt) Calculer $(\mathscr{F}(vp(1/x)))'$, puis $\mathscr{F}(vp(1/x))$ (en utilisant la question a)
et enfin $\mathscr{F}((vp(1/x))')$. En déduire b.